

第一章 代数与几何

1.1 集合与逻辑基础

- (1) 命题逻辑, 谓词逻辑.
- (2) 集合, 对应, 映射, 单射, 满射, 一一对应.
- (3) 映射的像与原像, 逆映射.
- (4) 集合的直积, 无交并, 集合的幂集.
- (5) 二元关系, 反身性, 对称性, 传递性, 等价关系, 等价类, 商集.
- (6) 偏序集, 全序, 良序, 区间, 数学归纳法.
- (7) 序数, 基数, 可数集.
- (8) 上界, 下界, 极大元, 极小元, 最大元, 最小元, 上确界, 下确界.
- (9) 选择公理及其等价形式, Zorn 引理.

1.2 群

- (1) 二元运算, 半群, 幺半群, 可逆元.
- (2) 群, Abel 群, 群同态, 群的直积.
- (3) 子群, 子集生成的子群, 元素的阶, 正规子群, 商群.
- (4) 群的作用, 稳定子群, 商集, 共轭类.
- (5) 循环群, 有限 Abel 群.
- (6) 置换群, 对换, 轮换, 置换的符号, 交错群.

1.3 环

- (1) 幺环, 环同态, 子环, 环的乘积, 双边理想, 商环.
- (2) 交换幺环的理想, 素理想, 极大理想, 中国剩余定理.

- (3) 交换幺环上的代数，一元或多元多项式代数，形式幂级数代数，多项式的带余除法，首项系数可逆的多项式的根，重数，分裂首一多项式根与系数的关系，齐次多项式，对称多项式.
- (4) 除环，域，整环的分式域，子域，域特征，Frobenius 同态，域扩张.
- (5) 整环，主理想整环，欧几里得整环，素元，不可约元，可逆元，最大公因子，最小公倍元，唯一分解环，唯一分解环上的多项式代数，主理想整环上的有限生成模.
- (6) 有理数域、实数域和复数域的构造，代数基本定理.
- (7) 交换幺环上的有限模，代数中的整元，域的代数扩张和超越扩张，代数封闭域，模不可约多项式的剩余类域，分裂域，分圆域，可分扩张，正规扩张，Galois 群.
- (8) 整数环与域上多项式环的算术，Eisenstein 判别法，商环中的可逆元，Euler 函数.

1.4 线性代数

- (1) 模，模同态，模的直积与直和，直和分解，子模，商模，生成元，自由模，基.
- (2) 模同态的核，同构定理.
- (3) 交换幺环上模的对偶模，模的同态组成的模，模同态的对偶，模的自同态代数，矩阵，矩阵的转置，有限生成自由模之间同态的矩阵.
- (4) 域上的线性空间，线性映射，基的存在性.
- (5) 线性空间自同态的不变子空间，特征值，特征向量，特征子空间，线性自同态的多项式，核引理.
- (6) 有限生成线性空间的基，维数，线性映射和矩阵的秩，阶梯矩阵，线性方程组的解，决定线性子空间的方程.
- (7) 多重线性映射，对称性和交错性，张量积，外积，线性自同态的行列式和迹，可逆性的行列式判别，一般线性群和特殊线性群，实线性空间的定向.
- (8) 线性自同态的特征多项式，极小多项式，Cayley-Hamilton 定理，对角化，幂零自同态，Dunford 分解，Jordan 标准型.

1.5 双线性代数

- (1) 双线性形式, 对称性, 双线性形式的核, 非退化双线性形式, 二次型, 二次型的秩, 二次型的极化, 平行四边形等式, 双线性形式的矩阵表示, 线性映射的伴随映射.
- (2) 正交性, 迷向锥, 迷向子空间, 双线性形式分解成平方和, Sylvester 惯性定理, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上二次型的分类, 正交化.
- (3) 复向量空间上的一个半线性形式, Hermite 性, 半内积, Cauchy-Schwarz 不等式, 半范数, 内积, 范数, Hilbert 空间.
- (4) 正交群, 特殊正交群, 正交自同态分解为反射的复合, 酉群, 线性映射的伴随映射, 自伴算子, 正规算子, 正规算子的对角化, 两个实二次型的同时约化, 平面和三维空间的欧氏几何, 三维空间向量的外积.

1.6 欧氏几何

- (1) 仿射空间, 子仿射空间, 重心, 仿射标架, 仿射空间的方程.
- (2) 仿射群, 位似变换群, 仿射空间的夹角.
- (3) 欧氏空间仿射子空间的等距同构, 等距同构群.
- (4) 凸集, 凸包, 凸多面体.
- (5) 二次超曲面的分类, 仿射平面中的圆锥曲线, 三维空间中的二次曲面.

第二章 分析与概率

2.1 数列

- (1) 集合中的序列, Abel 群中的级数, Abel 求和公式, 子列.
- (2) 增广实轴, 序完备性, Cauchy 序列, 上极限、下极限、极限, Bolzano-Weierstrass 定理.
- (3) 数列, 数项级数, 交错级数, 正项级数, 绝对收敛性, 几何级数, Riemann 级数, 级数与积分的比较, 余项估计, 级数的乘积.

2.2 拓扑

- (1) 度量空间, 开集, 闭集, 有界集, 拓扑, 拓扑空间, 诱导拓扑, 拓扑空间的乘积.
- (2) 聚点, 闭包, 序列和映射的极限, 连续映射, 同胚.
- (3) 紧性, 列紧性, 连通性, 连通分支, 道路连通性.
- (4) Lipschitz 映射, 一致连续性, Heine 定理.
- (5) 度量空间的完备性, Baire 空间, 压缩映射的不动点定理.
- (6) 线性赋范空间, 范数的等价性, 有限维情形, Banach 空间, Hahn-Banach 定理, ℓ^p 空间, Banach 空间中的绝对收敛级数.
- (7) 有界线性映射, 算子范数, 一致收敛范数, Arzela-Ascoli 定理.
- (8) 内积空间, Hilbert 空间, 闭子空间上的正交投影.
- (9) 内积空间的对偶, Riesz 表示定理, 标准正交基, 正交多项式.

2.3 微分

- (1) 一元连续函数的中间值定理, 单调函数的连续性, 反函数的连续性.

- (2) 可微性, 复合函数的微分, 反函数的微分, 中值不等式, 一元函数的中值定理.
- (3) 偏微分, 高阶微分, Taylor 公式, 积分余项, 函数的 Taylor 展开.
- (4) 函数项序列, 函数项级数, 绝对收敛性, 一致收敛性, 正规收敛性
- (5) 函数项序列极限的连续性、可微性.
- (6) Jacobian, Hessian, 局部极值, 凸函数, 凸性的判别.
- (7) 微分同胚, 反函数定理, 隐函数定理.

2.4 积分

- (1) σ -代数, 测度空间, Borel 代数, 测度, Lebesgue 测度, 乘积测度空间, 可测映射.
- (2) 正值可测函数的积分, 单调收敛性, Fatou 定理, 控制收敛定理.
- (3) 向量值函数的积分, 含参数的积分, 相对于参数的连续性和可微性.
- (4) L^p 空间, Hölder 不等式, 完备性.
- (5) Fubini 定理, 积分换元公式, 极坐标、球坐标换元, 分部积分公式.
- (6) 卷积, 光滑函数逼近.
- (7) Fourier 级数, Riemann-Lebesgue 定理, Dirichlet 定理, Fejér 核, Parseval 定理.
- (8) 分布, Fourier 变换, Schwartz 空间, Plancherel 定理, Fourier 逆变换.

2.5 微分方程

- (1) 常微分方程, 初值问题, Cauchy-Lipschitz 定理, 极大解, Grönwall 不等式.
- (2) 线性常微分方程, 变换常数法, 高阶线性常微分方程.
- (3) 线性偏微分方程, 椭圆型、双曲型、抛物型偏微分方程, 波动方程, 热方程.

2.6 微分几何

- (1) 欧氏空间的子流形, 局部图像, 局部参数, 局部方程, 参数曲线.
- (2) 切向量, 梯度, 切空间, 余切空间, 曲率.
- (3) Lagrange 乘子法.

2.7 复分析

- (1) 幂级数, 收敛半径, 连续性, 复可导性, 幂级数的微分方程.
- (2) 复指数, 常用函数的幂级数展开.
- (3) 全纯函数, Cauchy-Riemann 方程, 沿路径积分, 复对数, 含复参数的积分.
- (4) Cauchy 定理, 亚纯函数, Cauchy 积分公式, 全纯函数的解析性, 亚纯函数的 Laurent 级数, 留数定理, 极点和零点的分离定理, 最大值原理, 解析延拓, 解析延拓的唯一性.
- (5) 全纯函数的序列和级数, 一致收敛极限的全纯性.

2.8 概率论

- (1) 随机事件, 随机变量, 概率测度, 概率分布, 独立性, 联合分布, 分布函数, 密度函数.
- (2) Bernoulli 分布, 二项分布, 几何分布, 超几何分布, Poisson 分布, 均匀分布, 指数分布, 正态分布.
- (3) 数学期望, 矩, 方差, 标准差, 特征函数, Laplace 变换, 独立随机变量和.
- (4) 随机变量的收敛性, 依概率收敛, L^p 收敛, 几乎处处收敛.
- (5) Markov 不等式, Chebychev 不等式.
- (6) 大数律, 中心极限定理.
- (7) Radon-Nikodym 定理, 条件概率, 条件期望.
- (8) 统计量, 最小二乘估计, 参数估计, 假设检验, Fisher 信息量, Cramer-Rao 不等式.

2.9 数值分析

- (1) Gauss 消去法, 矩阵的 LU 分解, 特征值计算的数值方法.
- (2) 收敛速度, 迭代法, 二分法, Newton 法, 误差估计.
- (3) 数值积分, Monte-Carlo 方法, 多重积分的数值计算.
- (4) 插值, Lagrange 多项式, 误差估计.
- (5) 常微分方程的数值方法.